Иррациональные уравнения

Приступая к решению уравнения, нужно знать, к какому типу иррационального уравнения оно относится и какие приёмы надо применить для его решения. Выбор правильного подхода к решению поможет сэкономить время на экзамене. Главное – выработать алгоритм решения уравнений иррационального характера. Также необходимо знать свойства корней и степеней, формулы сокращённого умножения.

Основные виды иррациональных уравнений:

Уравнение вида $\sqrt[2n]{f(x)} = a, n \in\ N.$

$$\text{Если } a \geq 0, \text{то } f(x) = a^{2n},$$
$$\text{если } a < 0, \text{то корней нет.}$$

Уравнение вида $\sqrt[2n+1]{f(x)} = a, n \in\ N,$ равносильно уравнению
$$f(x) = a^{2n+1}.$$

Уравнение вида $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x), n \in\ N.$ Данное уравнение равносильно системе:
$$\begin{cases} f(x) = \left(g(x)\right)^{2n}, \\ \quad g(x) \geq 0\,, \end{cases}$$

(при этом $f(x) = g^2(x) \geq 0$, и условие $f(x) \geq 0$ отдельно ставить не требуется).

Уравнение вида $\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x), n \in\ N,$ равносильно уравнению
$$f(x) = \left(g(x)\right)^{2n+1}.$$

Уравнение вида $\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)}, n \in\ N.$ Данное уравнение равносильно одной из систем:
$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ \quad f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ \quad g(x) \geq 0\,. \end{cases}$$

Уравнение вида $\sqrt[2n+1]{f(x)} = \sqrt[2n+1]{g(x)},\ n \in N,$ равносильно уравнению
$$f(x) = g(x).$$

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = a$, обе части уравнения возводим в квадрат дважды $\left(\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}\right)^2 = a^2$, с проверкой в исходное уравнение.

В таком приёме, как возведение в квадрат при решении иррациональных уравнений, есть и существенные недостатки: поскольку мы увеличиваем область допустимых значений неизвестного, то следует внимательно следить за тем, чтобы не включались в ответ посторонние корни. Еще один способ обнаружить посторонние корни – проверить все найденные корни с помощью подстановки их в исходное уравнение.

Если в решении иррационального уравнения предусмотрена только цепочка равносильных переходов, то при каждом возведении в квадрат следует предусмотреть условие равносильности, указанное выше, а также предварительно установить условие, определяющее область определения первоначального уравнения.

Рассмотрим некоторые типы иррациональных уравнений и их методы решения.

1. Найти число корней уравнения.

$\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{2x-7}=4-x$. Ответ: 1.

Правую и левую части уравнения возводим в квадрат (правая часть уравнения должна быть положительна).

2. Найти сумму корней уравнения (или корень, если он единственный).

$x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$. Ответ: -3.

Найти произведение корней уравнения (или корень, если он единственный).

$\sqrt{25x^2+9}-\sqrt{25x^2-7}=2$. Ответ:$-\frac{16}{25}$.

Найти произведение корней уравнения.

$4\sqrt{x^2-5x+11}=(x-2)(x-3)$. Ответ: -14.

Введение новой переменной (подстановка).

3. Найти сумму корней уравнения (или корень, если он единственный).

$(2x-6)\sqrt{x^2-15x+35}=x\,(3x-9)$. Ответ: 2.

Важно учесть область допустимых значений, вынести за скобки общий множитель и решить уравнение, используя условие равенства нулю произведения.

4. Найти сумму корней уравнения (или корень, если он единственный).

$3\left(\sqrt{x+3}-1\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)=2x+4$. Ответ: -1.

Умножаем обе части уравнения на сопряжённое выражение, которое не обращается в нуль.

5. Найти сумму корней уравнения (или корень, если он единственный).

$\sqrt{3x-1}=\sqrt{x+5}$. Ответ: 3.

$\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{3x+2}$. Ответ: 2.

Правую и левую части уравнения возводим в одинаковую степень.

6. Найти произведение корней уравнения (или корень, если он единственный).

$\sqrt{3x^2-14x+17}=3-2x$. Ответ: -4.

Правую и левую части уравнения возводим в квадрат (правая часть уравнения должна быть неотрицательна).

7. Найти сумму корней уравнения (или корень, если он единственный).

$\sqrt{2x-9}+\sqrt{x-8}=2\sqrt{x-5}$. Ответ: 9.

Важно учесть область допустимых значений.

8. Найти сумму корней уравнения (или корень, если он единственный).

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1$. Ответ: 5.

Выделение полного квадрата в подкоренном выражении.

9. Решить уравнение.

$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$. Ответ: 1.

Использование монотонности функций.

10. Найти сумму корней уравнения (или корень, если он единственный).

$\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$. Ответ: -1.

Возведение в квадрат, важно учесть область допустимых значений.

11. Найти сумму корней уравнения (или корень, если он единственный).

$\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$. Ответ: -29.

Применение формулы сокращённого умножения или введение новой переменной.

12. Решить уравнение.

$\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$. Ответ: $-1; 1$.

Разложение на множители.

13. Найти сумму корней уравнения (или корень, если он единственный). $\frac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x$.

Подойдём к решению примера нестандартно. Разделим обе части уравнения на $x \neq 0$ и получим $\frac{x}{\sqrt{2x+15}}+\frac{\sqrt{2x+15}}{x}=2$.

Пусть $\frac{x}{\sqrt{2x+15}}=t$, тогда $t+\frac{1}{t}=2$, отсюда $t=1$.

$$\frac{x}{\sqrt{2x+15}}=1,$$

$$\sqrt{2x+15}=x, \text{ где } x>0,$$

$$2x+15=x^2,$$

$$x_1=5, x_2=-3 \text{ (не является корнем уравнения}, -3<0).$$

Ответ: 5.

14. Решить уравнение.

$\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$.

Пусть $\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}=t$.

Перемножим равенства

$$\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1,$$
$$\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}=t.$$

Получим $3x^2+5x+8-3x^2-5x-1=t$, откуда $t=7$.

Сложим равенства

$$\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1,$$
$$\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}=7.$$

Получаем $2\sqrt{3x^2+5x+8}=8$, то есть $\sqrt{3x^2+5x+8}=4$.

Отсюда $x_1=1, x_2=-\frac{8}{3}$.

Ответ: $-\frac{8}{3}$;1.

15. Решить уравнение.

$x^2-5x-4\sqrt{x}+13=0$.

Запишем это уравнение в следующем виде:

$$x^2 - 6x + 9 + x - 4\sqrt{x} + 4 = 0, \text{ то есть}$$

$$(x-3)^2 + \left(\sqrt{x} - 2\right)^2 = 0.$$

Это возможно при условии, что $\begin{cases} x - 3 = 0, \\ \sqrt{x} - 2 = 0, \end{cases}$

то есть $\begin{cases} x = 3, \\ x = 4, \end{cases}$ система противоречива.

Ответ: уравнение не имеет корней.

Следует учитывать, что некоторые задания не требуют проверки корней или задании каких-то ограничений: значение x определяется из условия, что корень принимает какое-то неотрицательное значение.