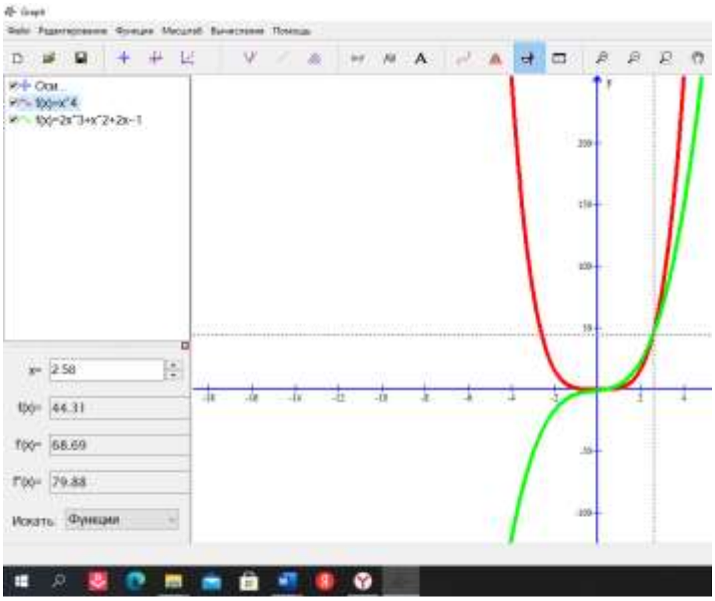
*Приложение 2*

## Примеры решения уравнений

**1**. $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$ (№ 5.11 а))
По схеме Горнера рациональными корнями могут быть только 1 или -1.
Проверка показывает, что они не являются корнями.
I способ (разложение на множители):
$x^4+x^3+x^2-3x^3-3x^2-3x+x^2+x+1=0$
$x^4+x^3+x^2-3x^3-3x^2-3x+x^2+x+1=0$
$x^2(x^2+x+1)-3(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=0$
$(x^2+x+1)(x^2-3x+1)=0$
$x^2+x+1=0$ $\qquad$ $x^2-3x+1=0$
$D<0$ $\qquad$ $D=5$
нет корней $\qquad$ $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.
Ответ: $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.
II способ (возвратное уравнение):
$x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$
$x^2-2x-1-2/x+1/x^2=0$
$(x^2+1/x^2)-2(x+1/x)-1=0$
$y=x+1/x$ $\qquad$ $y^2=x^2+1/x^2+2$
$y^2-2-2y-1=0$
$y^2-2x-3=0$
$D=5$
$y_1=3$ $\qquad$ $y_2=-1$
$x+1/x=3$ $\qquad$ $x+1/x=-1$
$x^2-3x+1=0$ $\qquad$ $x^2+x+1=0$
$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ $\qquad$ нет корней.
Ответ: $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.



**2**. $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$ (№ 5.11 б))
I способ:
По схеме Горнера рациональными корнями могут быть: $\pm1$, $\pm2$, $\pm3$, $\pm6$.
Проверка показала, что корнями являются 2 и 3.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | -35 | 62 | -35 | 6 |
| 2 | 6 | -23 | 16 | -3 | 0 |
| 3 | 6 | -5 | 1 | 0 | |

Осталось решить
$6x^2-5x+1=0$
$D=1$
$x_1=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $x_2=\frac{1}{3}$

Ответ: 2, 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.

II способ: (возвратное уравнение)

$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$

$6x^2-35x+62-35/x+6/x^2=0$

$6(x^2+1/x^2)-35(x+1/x)+62=0$

$y=x+1/x \quad y^2-2=x^2+1/x^2$

$6y^2-12-35y+62=0$

$6y^2-35y+50=0$

$D=25$

$y_1=\frac{10}{3}$ $\qquad y_2=\frac{5}{2}$

$x+1/x=\frac{10}{3}$ $\qquad x+1/x=\frac{5}{2}$

$3x^2-10x+3=0$ $\qquad 2x^2-5x+2=0$

$D=64$ $\qquad D=9$

$x_1=3 \quad x_2=\frac{1}{3}$ $\qquad x_1=\frac{1}{2} \quad x_2=2$

Ответ: 2, 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.

**3.** $x^5-5x^4+6x^3+18x^2-135x+243=0$ (№ 5.11 в))

I способ:

По схеме Горнера рациональными корнями могут быть: $\pm1$, $\pm3$, $\pm9$, $\pm27$, $\pm81$, $\pm243$.

Проверка показала, что корнями являются 3 и -3,

| | 1 | -5 | 6 | 18 | -135 | 243 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | -2 | 0 | 18 | -81 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 3 | 27 | 0 | |
| -3 | 1 | -2 | 9 | 0 | | |

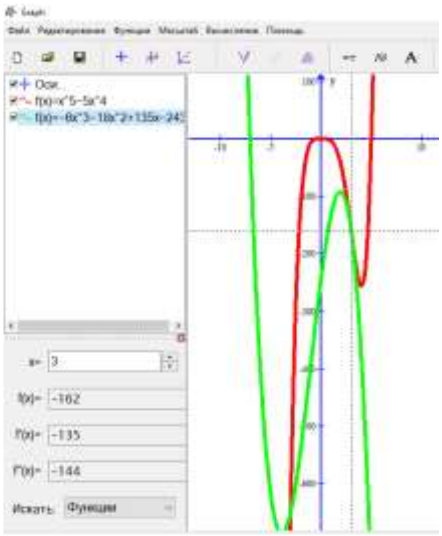
Осталось решить

$x^2-2x+9=0$

$D<0$

нет корней.

Ответ: -3, 3.



**4.** $16x^4+8x^3-7x^2+2x+1=0$ (№ 5.11 г))

I способ:

По схеме Горнера целыми рациональными корнями могут быть: $\pm1$. Проверка показала, что корнем является -1.

| | 16 | 8 | -7 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 16 | -8 | 1 | 1 | 0 |

Чтобы не проверять дробные корни применим метод переброски: разделим на $x^3$ и сделаем замену $y=1/x$.

$16y^3-8y^2+y+1=0$

По схеме Горнера целыми рациональными корнями могут быть: $\pm2$, $\pm4$, $\pm8$, $\pm16$. Проверка показала, что корнем является 4 и .

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | -8 | 16 |
| -4 | 1 | -3 | 4 | 0 |

x=-1/4

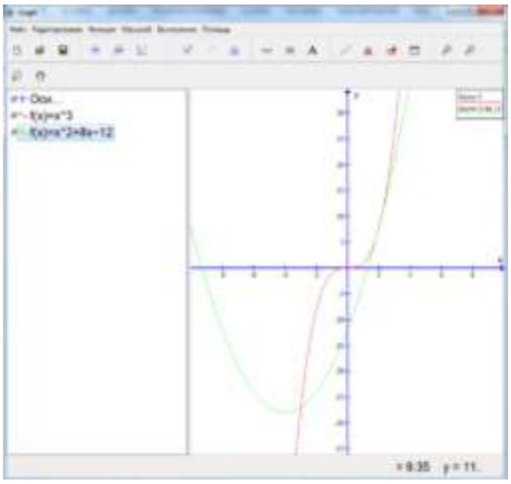
Осталось решить

$y^2-3y+4=0$

D<0

нет корней.

Ответ: -1, -1/4.



**5.** $x^3-x^2-8x+12=0$.

I способ:

По схеме Горнера рациональными корнями могут быть: $\pm1$, $\pm2$, $\pm3$, $\pm4$, $\pm6$, $\pm12$.

Проверка показала, что корнями являются 3 и 2,

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -1 | -8 | 12 |
| 2 | 1 | 1 | -6 | 0 |
| 2 | 1 | 3 | 0 | |
| -3 | 1 | 0 | | |

Ответ: 2, -3.

II способ: (метод группировки)

$x^3-x^2-8x+12=0$.

$x^3-4x^2+3x^2+4x-12x-12=0$.

$x^2(x+3)-4x(x+3)+4(x+3)=0$

$(x+3)(x^2-4x+4)=0$

$(x+3)(x-2)^2=0$

$x=-3 \quad x=2$

Ответ: 2, -3.

III способ: (по формуле Кордано)

$x^3-x^2-8x+12=0$.

Приведём уравнение к каноническому виду с помощи замены переменной $x=y+1/3$,

$$y^3+y^2+\frac{1}{3}y+\frac{1}{27}-y^2-\frac{2}{3}y-\frac{1}{9}-8y-\frac{8}{3}+12=0$$

$$y^3-\frac{25}{3}y+\frac{250}{27}=0$$

$a=-\frac{25}{3}, \quad b=\frac{250}{27}$

$$y=\sqrt[3]{-\frac{125}{27}+\sqrt{\left(\frac{125}{27}\right)^2+\left(-\frac{25}{9}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{125}{27}-\sqrt{\left(\frac{125}{27}\right)^2+\left(-\frac{25}{9}\right)^3}}=-\frac{10}{3}$$

x=-10/3+1/3=-3,

Разделив уголком на x+3 получили $x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$, x=2

Ответ: 2, -3.

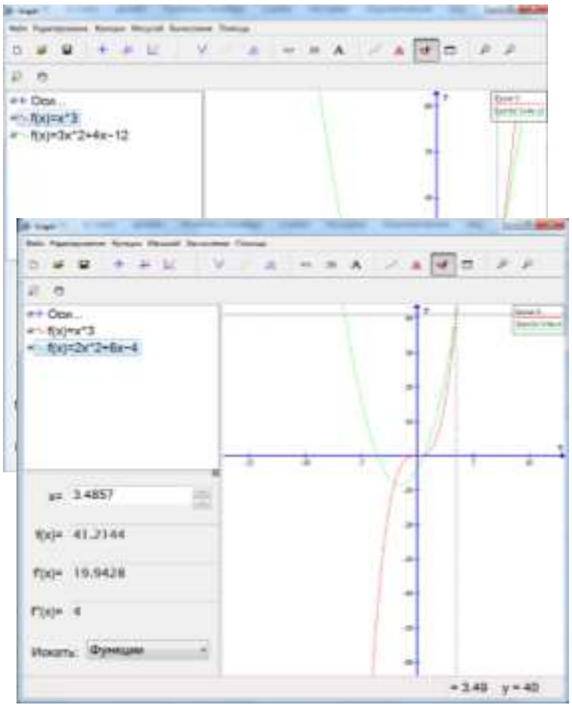
**6.** $x^3 - 2x^2 - 6x + 4=0$

I способ:

По схеме Горнера рациональными корнями могут быть: $\pm1$, $\pm2$, $\pm4$.

Проверка показала, что корнями являются 3 и 2,

| | 1 | -2 | -6 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| -2 | 1 | -4 | 2 | 0 |



Осталось решить

$x^2-4x+2=0$

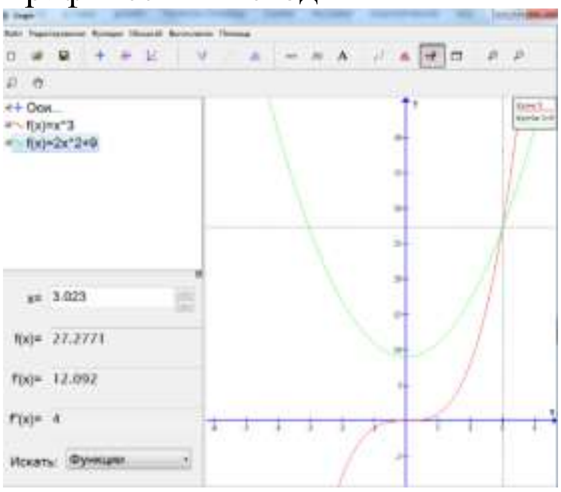
$D=8$

$x=2\pm\sqrt{2}$.

Ответ: $2\pm\sqrt{2}$

**7.** $x^3 – 2x^2 – 9 = 0$.

Графический метод



Ответ: 3.

**8.** $x^3-3x^2-4x+12=0$

I способ: метод неопределённых коэффициентов.

$D=-4(-3)^3 12+(-3)^2(-4)^2-4(-4)^3+18(-3)(-4)12-27(12)^2=400>0$, значит есть три рациональных корня.

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ x_3x_1+x_2x_1+x_2x_3=-4, \\ x_1x_2x_3=-12. \end{cases}$$

Получаем 2, -2 и 3.

Ответ: 2, -2, 3.

**9.** $x^3-5x^2-16x+80=0$

I способ:

По схеме Горнера рациональными корнями могут быть: $\pm1$, $\pm2$, $\pm4$, $\pm5$, и т.д.

Проверка показала, что корнями являются 3 и 2,

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -5 | -16 | 80 |
| 4 | 1 | -1 | -20 | 0 |
| 4 | 1 | 3 | 0 | |
| 5 | 1 | 0 | | |

Ответ: 4, 5.

**10.** $x^3 - 6x^2 - 6x - 2 = 0$.

По схеме Горнера проверили – рациональных корней нет.

I способ: (по формуле Кордано)

$D=-4(-6)^3(-2)+36^2-4(-6)^3+18(-6)^2(-2)-27(-2)^2$

Приведём уравнение к каноническому виду с помощи замены переменной $x=y+2$,

$y^3+6y^2+12y+8-6y^2-24y-24-6y-12-2=0$

$y^3-18y-50=0$

$a=-18, \quad b=-50$

$y=\sqrt[3]{25+\sqrt{(25)^2+(-6)^3}}+\sqrt[3]{25-\sqrt{409}}$

$x=\sqrt[3]{25+\sqrt{409}}+\sqrt[3]{25-\sqrt{409}}+2$.

Ответ: $\sqrt[3]{25+\sqrt{409}}+\sqrt[3]{25-\sqrt{409}}+2$.

**11.** $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$.

**12.** $x^3+6x^2+11x+6=0$.

**13.** $x^3 - 7x - 6=0$

**14.** $2x^3 - x^2 - 2x+1=0$.

**15.** $2x^3-3x^2+5x-14=0$

**16.** $4x^3 - 19x^2 + 19x + 6=0$

**17.** $5x^3+5x^2+x - 11 = 0$

**18.** $6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0$.

**19.** $21x^3+x^2-5x-1=0$.

**20.** $x^4-2x^2-8=0$

I способ: подстановка $y=x^2$

$y^2-2y-8=0$

$D=36$

y=4 y=-2

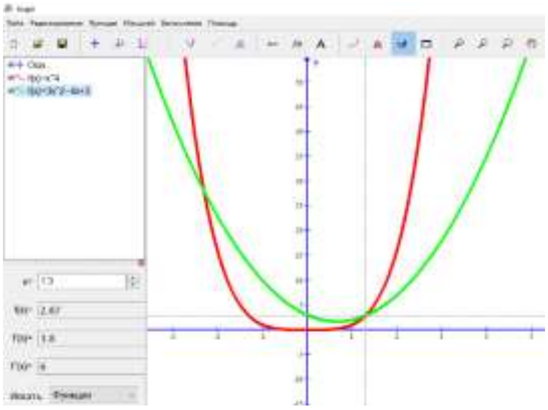
$x^2=4$ $x^2=-2$

$x=\pm 2$, нет корней.

Ответ: $\pm 2$

**21.** $x^4-3x^2+4x-3=0$

I способ: группировка и применение формул сокращённого умножения



$x^4-2x^2+1-1-x^2+4x-4+4-3=0$

$(x^2-1)^2-(x-2)^2=0$

$x^2-1=x-2$ $x^2-1=-x+2$

$x^2-x+1=0$ $x^2+x-3=0$

$D<0$ $D=13$

нет корней $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

Ответ: $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

**22.** $x^4-x^2+2x-1 = 0$

I способ: методом Феррари

$y^3+y^2+4y=0$

$y_0=0$

$x^2 \pm \sqrt{x^2-2x+1} = 0$

$x^2+x-1=0$ $x^2-x+1=0$

$D=5$ $D<0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ нет корней

Ответ: $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$x^4+3x^3+3x^2-x-6=0$

$x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$.

$x^4+4x^3+3x^2+2x-1=0$

$x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0$

$x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$

$x^4-5x^3-16x^2+100x-80=0$

$2x^4-5x^3-x^2+3x+1=0$.

$2x^4-7x^3+9x^2-7x+2=0$

$2x^4+9x^3-x^2+9x+2=0$.

$2x^4-x^3-7x^2-2x+8=0$

$2x^4-7x^3+9x^2-7x+2=0$

$2x^4-19x^2+9=0$

$3x^4-2x^3-8x^2-x+2=0$

$3x^4-2x^3+4x^2-4x+12=0$

$a^6+18a^4+108a^2+216=0$

$$x^7 - 2x^6 + 3x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0.$$

$$x^7 + 2x^6 - 5x^5 - 13x^4 - 13x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0.$$