Ход занятия

I Мотивационно-целевой этап

Учитель озвучивает тему. Предлагает озвучить цели занятия.

Я повторю...
Я узнаю…
Я обобщу…
Я научусь…
Я смогу…
Я буду…

– Как вы думаете, почему в геометрии так важно знать как можно больше о прямоугольном треугольнике?

– Среди всех геометрических фигур прямоугольный треугольник играет важную роль. Любой многоугольник можно разбить на треугольники. В свою очередь, построив высоту, любой треугольник легко разбить на два прямоугольных треугольника, элементы которых связаны между собой более простой зависимостью, чем в других видах треугольников. Найти элементы любого треугольника можно, если свести задачу к решению этих двух прямоугольных треугольников. И еще, следует помнить, что область тригонометрии возникает именно из изучения прямоугольных треугольников.

II Актуализация знаний

Задание 1. Учитель предлагает учащимся соотнести номер утверждения с видом высказывания. Ответы заносятся в таблицу.

Тема утверждения	Номера утверждений
Определение прямоугольного треугольника и его элементы	
Свойства прямоугольного треугольника	
Признаки равенства прямоугольных треугольников	
Соотношения в прямоугольном треугольнике	
Признаки прямоугольного треугольника	

1. Прямоугольный треугольник – треугольник, в котором один угол прямой.

2. Катет, противолежащий углу в 30°, равен половине гипотенузы.

3. Высота, проведенная из вершины прямого угла, равна среднему геометрическому проекций катетов на гипотенузу.

4. Радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности равен половине гипотенузы.

5. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

6. Если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

7. Синусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

8. Тангенсом угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

9. Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

10. В прямоугольном треугольнике катеты одновременно являются и высотами треугольника.

11. Косинусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

12. Котангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к противолежащему.

13. Если катет и противолежащий ему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

14. Сторона прямоугольного треугольника, противоположная прямому углу, называется гипотенузой.

15. Если в треугольнике катет вдвое меньше гипотенузы, то напротив него лежит угол в 30°.

16. Высота в прямоугольном треугольнике, проведенная из вершины прямого угла, делит его на два подобных и подобных исходному треугольнику.

17. Стороны, прилежащие к прямому углу, называются катетами.

18. Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого треугольника, то такие треугольники равны.

19. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

20. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

21. В прямоугольном треугольнике два острых и один прямой угол.

22. Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности – есть середина гипотенузы.

23. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

24. Медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине и является радиусом описанной окружности.

<u>Дополнительные вопросы</u>

1) Какое из утверждений носит название теоремы Пифагора?

2) Какое утверждение является теоремой, обратной теореме Пифагора?

<u>Задание 2.</u> «Лови ошибку». Учащимся предлагается найти ошибки в формулах. Для проверки формул 9–14 можно воспользоваться сетью интернет.

1. a, b – катеты, с – гипотенуза

$$a^2 + b^2 = c^2$$

2. a_c, b_c – проекции катетов на гипотенузу

$$a_c = \frac{a}{c}; \quad b_c = \frac{b}{c} \textit{ (Ответ: } a_c = \frac{a^2}{c}; \quad b_c = \frac{b^2}{c}\textit{)}$$

3. h_c – высота, проведенная к гипотенузе

$$h_c = \sqrt{a_c b_c}; \quad h_c = \frac{ab}{2} \text{ (}\textit{Ответ: } h_c = \frac{ab}{c}\text{)}$$

4. α - угол, лежащий против катета a

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c};\ tg\alpha = \frac{b}{a};\ ctg\alpha = \frac{a}{b} \textit{ (Ответ: } tg\alpha = \frac{a}{b};\ ctg\alpha = \frac{b}{a}\textit{)}$$

5. m_c – медиана, проведенная к гипотенузе

$$m_c = \frac{c}{2}$$

6. R – радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника

$$R = \frac{c\sqrt{3}}{2} \textit{ (Ответ: } R = \frac{c}{2}\textit{)}$$

7. r – радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник

$$r = \frac{a+b-c}{2} = p - c, \text{ где } p \text{ – полупериметр}$$

8. S – площадь прямоугольного треугольника

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{ch_c}{2} = \frac{ac\cdot sin\gamma}{2} = \frac{bc\cdot sin\alpha}{2} = pr, \text{ где } p \text{ – полупериметр } \textit{(Ответ: } S = \frac{ac\cdot sin\beta}{2}\textit{)}$$

9. m_a ; m_b – медианы, проведенные к катетам, a, b

$$m_b = \frac{a}{4} + b;\ m_a = \frac{b}{4} + a \textit{ (Ответ: } m_a^2 = \frac{a^2}{4} + b^2, m_b^2 = \frac{b^2}{4} + a^2\textit{)}$$

10. Формула, связывающая медианы прямоугольного треугольника

$$m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$$

11. l_c– биссектриса, проведенная к гипотенузе

$$l_a = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b} \textit{ (Ответ: } l_c = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}\textit{)}$$

12. O_1O_2 – расстояние между центром вписанной и описанной окружности

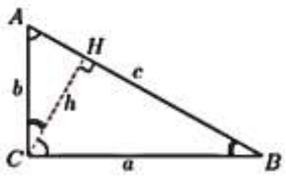
$$O_1O_2 = \sqrt{R^2 - 2Rr}$$

13. Связь между катетами и радиусами вписанной и описанной окружности

$$2(a + b) = R + r \textit{ (Ответ: } a + b = 2(R + r)\textit{)}$$

14. Связь сходственных линейных элементов в подобных треугольниках, на которые разбивает прямоугольный треугольник высота, проведенная к гипотенузе (см. рис.)

$$k_{ACH}^2 + k_{BCH}^2 = k_{ABC}^2$$



Результаты работы обсуждаются фронтально.

III Решение задач

Учащимся предлагается решить устные задачи и задачи с минимальным вычислением.

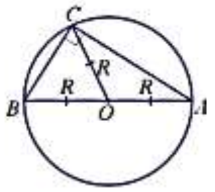
Номера 1 и 2 решают фронтально, 3–10 – в парах с дальнейшим обсуждением решений.

<u>Задача № 1.</u> В прямоугольном треугольнике *ABC* ($\angle C = 90^{\circ}$) проведена высота *CD*. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники *ACD* и *BCD*, равны 0,6 см и 0,8 см соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*. *(Подсказка: утверждение 16, формула 14)*

Ответ: 1 см.

<u>Задача № 2.</u> Докажите утверждение: «Если медиана треугольника равна половине соответствующей ей стороны, то треугольник прямоугольный».

Подсказка:



<u>Дополнительный вопрос</u>

Скажите, к какому виду утверждений можно отнести данное утверждение? *(Ответ: признак прямоугольного треугольника.)*

<u>Задача № 3.</u> Найдите расстояние между центром вписанной и описанной окружности в прямоугольном треугольнике, если $R = 5$, $r = 2$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

<u>Задача № 4.</u> В треугольнике ОКМ (∠К – прямой) ОМ = $2\sqrt{21}$, а угол М равен 30°. Найдите ОК.

Ответ: $\sqrt{21}$.

<u>Задача № 5.</u> В прямоугольном треугольнике АВС (∠С – прямой) $tg\ A = 2$, АС= 6. Найдите ВС.

Ответ: $12\sqrt{2}$.

<u>Задача № 6.</u> Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его стороны равны 6, 8, 10.

Ответ: 24.

<u>Задача № 7.</u> В треугольнике АОК (∠О – прямой) ОА=$2\sqrt{7}$, ОК=$\sqrt{21}$. Найдите АК.

Ответ: 7.

<u>Задача № 8.</u> В треугольнике ВОС (∠О – прямой), ОК – высота, ВК=$3\sqrt{15}$, ОК=3. Найдите КС.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

<u>Задача № 9.</u> Найдите *r* для треугольника из задания № 4.

Ответ: 2.

<u>*Задача* № 10.</u> Найдите *R* для треугольника из задания № 4.

Ответ: 5.

IV Информационная минута

А знаете ли вы?.. (https://strouy.ru/interesnyye-fakty-pro-pryamougol-nyy-treugol-nik/)

1. А знаете ли вы, что по книге рекордов Гиннеса теорема Пифагора имеет наибольшее число доказательств теоремы и насчитывает их более трехсот?

2. А знаете ли вы, что среди всех доказательств теоремы Пифагора существует одно неизвестное доказательство, и это доказательство самого автора теоремы, так как оно принадлежит не Пифагору, а Евклиду?

3. А знаете ли вы, что, оказывается, теорема Пифагора, была известна во многих странах еще задолго до древнегреческого философа?

4. А знаете ли вы о происхождении «пифагоровых штанов»? Вроде как понятно, так как построенные на сторонах треугольника квадраты, которые расходятся в разные стороны, напоминают покрой мужских штанов. Но загадка в другом: оказывается, что древние греки не знали, что такое «штаны», да и сам Пифагор их никогда не носил.

V Решение задач. «Мозаика»

Учащимся предлагается решить задачи и ответить на вопрос: почему этап называется «Мозаика»? *(При решении задач можно использовать решения предыдущих задач.)*

Задача № 11. В треугольнике ABC стороны AC и BC соответственно равны 8 и 6, а медиана CO равна половине стороны AB. Найдите расстояние между центром вписанной в треугольник окружности и центром окружности, описанной около него. В ответ запишите квадрат этого расстояния.

Задача № 12. Из точки А, отстоящей от плоскости α на расстоянии $2\sqrt{7}$, проведена наклонная под углом 30° к плоскости α. В этой же плоскости α через основание наклонной проведена прямая l под углом 30° к проекции наклонной. Найдите расстояние от точки А до прямой l.

Задача № 13. В прямоугольном треугольнике ABC (угол C – прямой) AC = 6, tgA = $2\sqrt{2}$. Найдите гипотенузу AB.

Задача № 14. Окружность радиуса 3, вписанная в ромб ABCD делит одну из диагоналей на отрезки, длины которых относятся как 3:2:3. Найдите сторону ромба. В ответ запишите $BC\sqrt{15}$.

VI Рефлексия

Учащимся предлагается вернуться к целям занятия и ответить на вопросы: какие из глаголов вы можете изменить уже сегодня? Какой глагол, по-вашему мнению, должен быть неизменен всегда?

Я повторю...

Я узнаю…

Я обобщу…

Я научусь…

Я смогу…
Я буду…

VII Домашнее задание

Задание 1. Прочитайте текст. Среди предложенных пифагоровых троек выделите примитивные.

Пифагорово число (пифагорова тройка) – комбинация из трёх целых чисел (x, y, z), удовлетворяющих соотношению Пифагора: $x^2 + y^2 = z^2$.

Свойства. Поскольку уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ однородно, при домножении x, y и z на одно и то же число получится другая пифагорова тройка. Пифагорова тройка называется *примитивной*, если она не может быть получена таким способом, то есть x, y и z – взаимно простые числа.

Треугольник, стороны которого равны пифагоровым числам, является прямоугольным. Кроме того, любой такой треугольник является героновым, т. е. таким, у которого все стороны и площадь являются целочисленными. Простейший из них – египетский треугольник со сторонами 3, 4 и 5 ($3^2 + 4^2 = 5^2$).

Пифагорова тройка (a, b, c) задаёт точку с рациональными координатами $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ на единичной окружности $x^2 + y^2 = z^2$.

Любая примитивная пифагорова тройка однозначно представляется в виде $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ для некоторых натуральных, взаимно простых $m > n$, имеющих разную чётность. Наоборот, любая такая пара ($m; n$) задаёт примитивную пифагорову тройку.

Примеры: (3; 4; 5); (6; 8; 10); (5; 12; 13); (9; 12; 15); (8; 15; 17);
(12; 16; 20); (15; 20; 25); (7; 24; 25); (10; 24; 26); (20; 21; 29); (18; 24; 30);
(16; 30; 34); (21; 28; 35); (12; 35; 37); (15; 36; 39); (24; 32; 40); (9; 40; 41);
(14; 48; 50); (30; 40; 50);…

История

Пифагоровы тройки известны очень давно. В архитектуре древнемесопотамских надгробий встречается равнобедренный треугольник, составленный из двух прямоугольных со сторонами 9, 12 и 15 локтей. Пирамиды фараона Снофру (XXVII век до н. э.) построены с использованием треугольников со сторонами 20, 21, 29 и 18, 24, 30 десятков египетских локтей. (https://vlab.fandom.com/ru/wiki/Пифагоровы_числа)

Задание 2. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^0$, CH – высота, проведенная к гипотенузе. BH = $3\sqrt{6}, \angle BCH = 30^0$. Для начала каждого из предложений А–В подберите его окончание 1–6 так, чтобы получилось верное утверждение. [1]

Начало предложения	Окончание предложения
А) Длина стороны ВС треугольника АВС равна … Б) Длина стороны АС треугольника АВС равна … В) Расстояние от точки пересечения биссектрис треугольника АВС до стороны АВ равно …	1) $6\sqrt{30}$; 2) $12\sqrt{6}$; 3) $6\sqrt{6}$; 4) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$; 5) $9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}$; 6) $18\sqrt{2}$

Ответ: А3Б6В5

Задание 3. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC (∠ABC=90°) равен $18\sqrt{2}$. Найдите значение выражения $90 \cdot \cos \angle ACB$, если BC=6 $\sqrt{2}$. [2]

Ответ: 15